

туры не менее 300 °С с целью разрядки. Результаты расчета показали, что нагрев происходит вследствие действия электромагнитного поля на детонаторы, которые размещены вблизи индуктора, скорость нагрева может достигать 100 град./мин. Другие детали получают тепло вследствие теплопередачи от нагретых деталей и через корпус емкости из немагнитного материала с скоростью не более 20 град./мин. Время, нужное для нагрева всех деталей, зависит от установленной допустимой максимальной температуры и количества деталей, которые непосредственно не испытывают действие электромагнитного поля. Повышение мощности нагревателя не ускоряет процесс. Введение ограничения по максимальной температуре может привести к необходимости нагрева деталей в несколько этапов.

Ускорение процесса нагрева всех детонаторов возможно лишь при изменении формы емкости для деталей из цилиндрической на тороидальную. Такая форма емкости обеспечит нагрев большинства деталей непосредственно от действия электромагнитного поля. Полученные варианты расчета мощности нагревания позволяют создать реальное ИНУ для утилизации детонаторов.

Список литературы: 1. Простяков А.А. Индукционно-нагревательные установки. – М., 1970. 2. Некрасов А.С., Синяк Ю.В. Экономика энергетики процессов нагрева. – М., Энергия, 1965. 3. *Зенкевич О.* Метод конечных элементов в технике. – Москва, Мир, 1975. – 541 с. 4. *Миллер В.С.* Контактный теплообмен в элементах высокотемпературных машин. – Киев: Наукова думка, 1966. – 164 с. 5. *Сегерлинд Л.* Применение метода конечных элементов. – М., Мир, 1979. – 392 с. 6. *Демидович Б.П., Марон И.А.* Основы вычислительной математики. – М., Физматгиз, 1963. – 660 с. 7. Попов В.М. Теплообмен в зоне контакта разъемных и неразъемных соединений. – М., Энергия, 1971. – 235 с.

Поступила в редколлегию 07.07.2009

УДК 539.1

В.А.ВАНИН, докт.техн.наук, проф., НТУ «ХПИ»;
А.А.ГРИГОРЬЕВ, асп., НТУ «ХПИ»

СОЛИТОНЫ РАССЕЛА В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПРУЖИНЕ

Показано, що низькочастотні нелінійні коливання циліндричної пружини описуються рівняннями Кортевега – де Фриза. Отримані формули, що пов'язують амплітуду, енергію та імпульс солітона зі швидкістю його руху по гвинтовому стрижню.

It is shown, that the low-frequency non-linear oscillations of the cylindrical spring have been described by the equations of Korteweg – de Vries. The formulae relating the amplitude, the energy and the pulse of the soliton with its traveling Speed along the spiral rod have been gained.

Введение. В работе [1] на основе критического анализа и синтеза известных методов, описанных в [2-6], получена новая математическая модель связанных нелинейных колебаний, возникающих в винтовом цилиндрическом стержне (пружине). Известно (смотри [7-9]), что многие автоколебательные процессы, происходящие в непрерывных системах, описываются простейшим одномерным уравнением Кортевега–де Фриза

$$u'_t + (u + u^2 + u''_{xx})'_x = 0, \quad (1)$$

где u – амплитуда волны; t – время, x – пространственная координата (в уравнении (1) все эти величины приведены к безразмерному виду). Устойчивыми решениями уравнения (1) являются уединенные волны переноса $u = \Psi(x - vt)$, движущиеся со скоростью v , зависящей от амплитуды. Эти волны получили название *классические солитоны Рассела*, а их амплитудная функция $\Psi(x)$ описывается равенством

$$\Psi(x) = 1.5(v-1) / ch^2(0.5\sqrt{v-1} \cdot x). \quad (2)$$

В некоторых случаях процесс автоколебаний описывается модифицированным уравнением Кортевега – де Фриза

$$u'_t + (u + u^3 + u''_{xx})'_x = 0, \quad (1a)$$

а амплитудная функция *модифицированного солитона Рассела* имеет вид

$$\Psi(x) = \sqrt{2(v-1)} / ch(\sqrt{v-1} \cdot x). \quad (2a)$$

В настоящее время считается, что изучение уединенных волн переноса даст ключ к решению универсальных проблем физики, поэтому они активно исследуются в разных областях науки, где их удастся обнаружить; начиная с 1985-го года в мире ежегодно появляется более 2-ух тысяч публикаций по солитонной тематике. В данной работе показано, что такие волны могут возникать и в винтовых цилиндрических стержнях, колебания которых описываются моделью из статьи [1]. Заметим, что цилиндрический винтовой стержень (пружина) имеет, как и кристаллическая решетка, повторяющуюся пространственную структуру, что делает задачу изучения его автоколебаний особенно важной как с теоретической, так и с практической точки зрения.

Выбор математической модели. Полученная в [1] динамическая модель пружины учитывает перемещения 6-ти координат поперечного сечения стержня (рис.1), которые естественным образом объединяются в две группы: x_1, x_2, x_3 и y_1, y_2, y_3 , с условными названиями «продольные колебания» и «поперечные колебания». Предполагается, что сечения стержня идентичны, а его колебания» и «поперечные колебания». Предполагается, что сечения стержня идентичны, а его винтовая ось имеет к началу колебаний постоянный угол подъема δ_0 . Величина $\tan \delta_0$ определяет относительное начальное кручение, а $z^{-1} = d/D$ (где d – диаметр поперечного сечения, D – диаметр наводки, z – индекс) – относительную начальную кривизну стержня. Далее рассматриваются

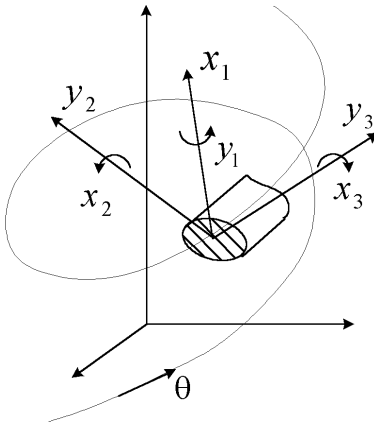


Рисунок 1 – Координаты сечения

стержни круглого или эллиптического сечения с малой кривизной ($z > 7$) и малым начальным кручением ($\delta_0 < 5^\circ$). Основные результаты, полученные в статье, остаются справедливыми и для стержней с квадратным или прямоугольным поперечным сечением.

В данной работе используется частный случай модели [1], актуальный для описания связанных низкочастотных колебаний пружины. Матричная форма соответствующих уравнений была опубликована в [6] и имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} Mx & \Theta \\ \Theta & My \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \tau} \begin{bmatrix} Vx \\ Vy \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} I & \Theta \\ \Theta & I \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \theta} - \begin{bmatrix} B & \Omega \\ \Omega & -B^T \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} Qx \\ Qy \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} Cx & \Theta \\ \Theta & Cy \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \tau} \begin{bmatrix} Qx \\ Qy \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} I & \Theta \\ \Theta & I \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \theta} + \begin{bmatrix} B^T & -\Omega \\ -\Omega & -B \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} Vx \\ Vy \end{bmatrix} \end{cases}, \quad (3)$$

где Vx, Vy – векторы, составленные из скоростей изменения координат x_j или y_j ; Qx, Qy – отвечающие им упругие силы и моменты сил q_j или f_j ; Mx, My, Cx, Cy – диагональные матрицы инерционных коэффициентов и коэффициентов податливости сечения; I, Θ – единичная и нулевая матрицы 3-го порядка; B, Ω – недиагональные матрицы линейной и нелинейной связи координат:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Omega = \begin{pmatrix} 0 & -(tg\delta_0 \pm cx_3 \cdot q_3) & 0 \\ tg\delta_0 \pm cx_3 \cdot q_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4)$$

знак «+» соответствует пружине растяжения, знак «-» – сжатия. Элементы диагональных матриц $Mx = \text{diag}(mx_1, mx_2, mx_3)$; $My = \text{diag}(my_1, my_2, my_3)$; $Cx = \text{diag}(cx_1, cx_2, cx_3)$; $Cy = \text{diag}(cy_1, cy_2, cy_3)$ вычисляются по формулам, обобщающим приведенные ранее в работе [1] для сечения круглой формы:

$$\begin{aligned} mx_1, my_2, my_3 &= m = \Delta; \quad mx_2 = \Delta^3 / (4z^2); \\ my_1 &= \Delta / (4z^2); \quad mx_3 = \Delta(1 + \Delta^2) / (4z^2); \\ cx_1, cy_2 &= (1 + \mu) / (2z^2 \Delta); \quad cx_2, cy_1 = 1 / \Delta; \\ cx_3 &= 0,5(1 + \mu)(1 + \Delta^2) / \Delta^3; \quad cy_3 = (4z^2 \Delta)^{-1}, \end{aligned}$$

где μ – коэффициент Пуассона; Δ – коэффициент овализации сечения (рис. 2).

Модель (3) оперирует с безразмерными величинами. Нормировки выбраны так, что радиус витка пружины R (начальный радиус кривизны) равня-

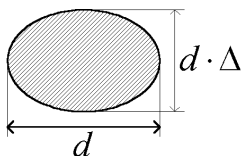


Рисунок 2 – Форма сечения

ется 1 и продолжительность распространения волны поперечной деформации по отрезку прямого стержня длиной R также равна 1. Нормировочные множители для сил δq и времени δT находятся по формулам

$$\delta q = 4z^2/(E \cdot S);$$

$$\delta T = \sqrt{E/\rho} / (2z \cdot R),$$

где E – модуль упругости; ρ – плотность материала стержня; S – площадь его сечения.

Моменты сил перед нормировкой дополнительно делятся на радиус витка R .

Постановка задачи. В работе [1] показано, что среди простых волн малой амплитуды, возникающих после линеаризации модели (3), (4) и имеющих форму

$$V_x, V_y, Q_x, Q_y \sim \exp(i \cdot (\omega t + \lambda \theta)),$$

различают колебания низкой, средней и высокой частоты. Этим колебаниям отвечают решения характеристического уравнения

$$\det \begin{bmatrix} i\omega Mx & \Theta & i\lambda I - B & \Omega \\ \Theta & i\omega My & \Omega & i\lambda I + B^T \\ i\lambda I + B^T & -\Omega & i\omega Cx & \Theta \\ -\Omega & i\lambda I - B & \Theta & i\omega Cy \end{bmatrix} = 0, \quad (6)$$

где, в силу условия $cx_3 \cdot |q_3| \leq \text{tg } \delta_0$, все элементы матрицы Ω считаются постоянными величинами. Колебаниям низкой частоты отвечают нижние ветви характеристического уравнения (рис. 3), причем точкам первого квадранта соответствуют гармонические, а третьего квадранта – экспоненциальные бегущие волны. Заметим, что для всех этих колебаний существенным является только изменение кручения χ_3 стержня, а остальными нелинейными факторами, учитываемыми в модели [1], здесь допустимо пренебречь.

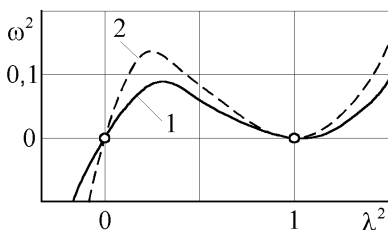


Рисунок 3 – Нижние ветви характеристического уравнения (1 – продольные, 2 – поперечные колебания)

Покажем, что связанные нелинейные свободные колебания малой частоты описываются КДФ – уравнением вида (1) и найдем основные параметры солитонов, которые можно будет наблюдать в длинных пружинах. При этом, поскольку длинные пружины сжатия без использования направляющих оказываются неустойчивыми, в данном исследовании мы ограничимся анализом пружин растяжения.

Аппроксимация характеристического уравнения. Для решения поставленной задачи раскроем определитель в равенстве (6) и упростим соотношения, используя комплекс аналитических и численно-аналитических методов.

Известно (смотри, например, работу [10]), что индекс пружины оказывает слабое влияние на положение нижних ветвей ее характеристического уравнения; здесь инерционность сечения при изгибе и кручении, а также его податливость при сжатии и сдвиге, которые зависят от величины индекса, в первом приближении допустимо не учитывать. В работе [11] для пружины с очень большим индексом (там принято $z = \infty$), изготовленной из проволоки круглого сечения, порядок определителя в равенстве (6) удалось понизить с 12-го до 4-го. Используя те же алгебраические приемы, но для произвольного сечения стержня, мы получили следующий результат:

$$\begin{vmatrix} -(1-\lambda^2+l^2) & (cx_3+\lambda^2cx_2) \cdot m \cdot \omega^2 / \lambda^2 & l \cdot m \cdot \omega^2 / \lambda^2 & 2l \cdot m \cdot \omega^2 \\ 1-\lambda^2-l^2 & -(1-\lambda^2)(1-\lambda^2+l^2) & 0 & -l \cdot \omega^2 / \lambda^2 \cdot m \cdot (\lambda^2+1) \\ l \cdot cy_1 & (-\lambda^2(cx_2+cy_1)+cy_1-cx_3) \cdot l & -(1-\lambda^2+l^2) & (1+\lambda^2) \cdot cy_1 \\ 0 & -(\lambda^2cx_2+cx_3) \cdot l & 1-\lambda^2-l^2 & -(1-\lambda^2)(1-\lambda^2+l^2) \end{vmatrix} = 0, \quad (7)$$

где обозначено $m = mx_1, my_2, my_3 = \Delta$; $l = \operatorname{tg} \delta = \operatorname{tg} \delta_0 + cx_3 \cdot q_3$.

Уравнение (7) является относительно частоты ω биквадратным и в области малых частот имеет аналитические решения

$$\omega^2 \approx (m \cdot cy_1)^{-1} \cdot \lambda^2 \cdot (1-\lambda^2+l^2)^2 / (1+\lambda^2) \quad \text{и}$$

$$\omega^2 \approx (m \cdot cx_3)^{-1} \cdot \lambda^2 \cdot (1-\lambda^2+l^2)^2 / (1+\mu+\lambda^2),$$

или, после извлечения корней из обеих частей уравнения,

$$\omega \approx \lambda \cdot (1-1.5 \cdot \lambda^2+l^2) \quad \text{и}$$

$$\omega \approx \lambda \cdot (1-(1+0.5/(1+\mu)) \cdot \lambda^2+l^2) / \sqrt{0.5(1+\mu)(1+1/\Delta^2)}, \quad (8)$$

где μ – коэффициент Пуассона, а волновое число удовлетворяет неравенству $|\lambda| < 0,3$.

Далее результаты (8), соответствующие модели первого приближения, были уточнены. Влияние индекса учтено за счет использования поправочных множителей:

$$\omega \approx \lambda \cdot (1+l^2-1.5 \cdot \lambda^2) \cdot (1-1/(8z^2)), \quad (9)$$

$$\omega \approx \lambda \cdot (1+l^2-(1+0.5/(1+\mu)) \cdot \lambda^2) \cdot (1-1/(4z^2)) / \sqrt{0.5(1+\mu)(1+1/\Delta^2)}, \quad (10)$$

величина которых была определена путем сопоставления формул (9), (10) с результатами численного решения характеристического уравнения (7); метод решения описан в [1]. В результате, для нижней ветви, отвечающей продольным колебаниям пружины, в области малых волновых чисел $|\lambda| < 0,3$ оказалась справедливой аппроксимация

$$\omega \approx \lambda \cdot (1+l^2-(1+0.5/(1+\mu)) \cdot \lambda^2) \cdot k / \sqrt{1+\mu}, \quad (11)$$

где поправочный коэффициент $k = (1 - 1/(4z^2)) / \sqrt{0.5(1 + \Delta^{-2})}$.

Нелинейное уравнение связанных колебаний. Учтем, что для продольных колебаний нижней ветви существенные значения имеют только три величины, **изменяющиеся синхронно**: скорость продольного перемещения V_{x1} , перерезывающая сила q_1 и момент кручения q_1 ; остальные три динамических параметра оказываются меньше указанных на порядок и более. Поэтому эти колебания пружины допустимо сводить к изменению только одной величины – момента q_3 , а равенство (11) оказывается характеристическим для следующего уравнения в частных производных:

$$\frac{\partial q_3}{\partial t} = \frac{k}{\sqrt{1+\mu}} \left[\frac{\partial q_3}{\partial x} + \frac{\partial(l^2(q_3)q_3)}{\partial x} + (1 + 0.5/(1+\mu)) \frac{\partial^3 q_3}{\partial x^3} \right],$$

или, с учетом условия

$$l^2 = (tg\delta_0 + cx_3 \cdot q_3)^2 \approx tg^2\delta_0 + 2 \cdot tg\delta_0 \cdot cx_3 \cdot q_3, \quad (12)$$

$$\frac{\partial q_3}{\partial t} = \frac{k}{\cos^2\delta_0\sqrt{1+\mu}} \left[\frac{\partial q_3}{\partial x} + cx_3 \sin 2\delta_0 \frac{\partial(q_3^2)}{\partial x} + (1 + 0.5/(1+\mu)) \cos^2\delta_0 \cdot \frac{\partial^3 q_3}{\partial x^3} \right]. \quad (13)$$

Покажем, что дифференциальное соотношение (13) является КДФ – уравнением вида (1). Для этого достаточно выполнить следующие замены:

$$u = q_3 \cdot (\sin 2\delta_0 \cdot cx_3); \quad \hat{x} = x / (\sqrt{(1 + 0.5/(1+\mu))} \cdot \cos\delta_0); \\ \hat{t} = t \cdot k / (\sqrt{1+\mu} \cos^2\delta_0), \quad (14)$$

и мы получим уравнение

$$u'_t + (u + u^2 + u''_{\hat{x}\hat{x}})'_{\hat{x}} = 0. \quad (15)$$

Отметим, что при колебаниях винтового стержня в соответствии с уравнением (15) величина $\Delta\chi_3 = \sin 2\delta_0$ отвечает изменению его кручения, причем внутри солитона угол наклона винтовой оси увеличивается.

Параметры классического солитона Рассела. Форма солитона (рис. 4) определяется двумя параметрами: амплитудой A изменения кручения $\Delta\chi_3$ и так называемой «эффективной длиной солитона» $2L$; после учета замен (14) получаем:

$$A = 1.5 \cdot (v-1) / \sin 2\delta_0; \quad 2L = \cos\delta_0 \cdot 2\sqrt{(1 + 0.5/(1+\mu))/(v-1)}, \quad (16)$$

где v – относительная скорость солитона. Заметим, что значение $v = 1$ соответствует скорости a_0 распространения по данной пружине длинной линейной волны продольной деформации; приближенное значение этой скорости можно найти по формулам работы [12], где используется модель эквивалентного стержня:

$$a_0 = 2\pi R i_e \sqrt{Z_{np} / m_{np}},$$

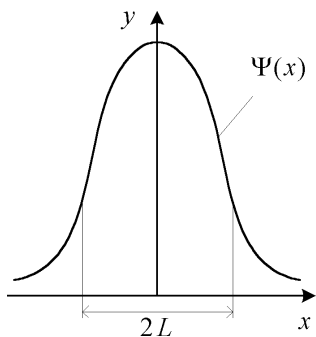


Рисунок 4 – Амплитудная функция солитона Рассела

i_e , m_{np} – число витков и масса пружины; Z_{np} – коэффициент жесткости пружины при ее растяжении.

Условие $cx_3 \cdot |q_3| \ll \text{tg } \delta_0$ эквивалентно неравенству $1,5(v-1) \ll 2\sin^2 \delta_0$, откуда получаем следующее ограничение для длины солитона:

$$2L \gg \sqrt{3 \cdot (1 + 0,5/(1+\mu))} / \text{tg } \delta_0 > 2/\text{tg } \delta_0. \quad (16)$$

Анализ полученных результатов показывает, что

- скорость солитона близка к скорости a_0 ;
- амплитуда солитона определяется скоростью его движения;
- эффективная длина солитона составляет 10 витков пружины и более;
- общее растяжение ΔS пружины для классического солитона Рассела зависит от его скорости и пропорционально корню из амплитуды A :

$$\Delta S = x_1(+\infty) - x_1(-\infty) = R \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(x) dx = R \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1,5(v-1)/\sin 2\delta_0}{\text{ch}^2(0,5\sqrt{v-1} \cdot x)} dx = \frac{3\sqrt{v-1}}{\sin 2\delta_0} \cdot R \sim \sqrt{A},$$

где R – радиус навитки пружины;

- энергия солитона пропорциональна величине $A^{3/2}$. Действительно, потенциальная энергия этой волны, в основном, связана с кручением проволоки:

$$\begin{aligned} \Pi &= 0,5 \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{j=1}^3 cx_j q_j^2(x) + \sum_{j=1}^3 cy_j f_j^2(x) \right) dx \approx 0,5 \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} cx_3 q_3^2(x) dx = \\ &= \frac{0,5}{cx_3} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(9/4)(v-1)^2 / \sin^2 2\delta_0}{\text{ch}^4(0,5\sqrt{v-1} \cdot x)} dx = \frac{3(v-1)^{3/2}}{cx_3 \sin^2 2\delta_0} = \frac{A^{3/2}}{cx_3 \sqrt{3 \sin 2\delta_0}}, \end{aligned}$$

а кинетическая энергия здесь равна потенциальной энергии;

- кроме энергии солитон переносит импульс P_c , направленный вдоль оси пружины, и момент количества движения J_c относительно этой оси:

$$P_c = \int_{-\infty}^{+\infty} mx_1 \cdot Vx_1(x) dx; \quad J_c = R \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} my_3 \cdot Vy_3(x) dx;$$

данные величины пропорциональны растяжению ΔS витков пружины.

Если стержень имеет круглое поперечное сечение, то переход к размерным величинам приводит к следующим формулам для энергии и импульса солитона:

$$E_M = \frac{\pi}{8(1+\mu)z\sqrt{3 \sin 2\delta_0}} G \cdot d^3 \cdot A^{3/2}; \quad P_c = \frac{3\pi/4}{\sqrt{3 \sin 2\delta_0}} d^3 \cdot \sqrt{\rho \cdot G \cdot A},$$

где G – модуль сдвига.

Например, если пружина изготовлена из стальной проволоки диаметром $d = 2$ мм, имеет индекс $z = 10$ и начальный угол подъема винтовой оси $\delta_0 = 2,5^\circ$, то скорость линейной волны деформации составляет

$$a_0 = \sqrt{(2G/\rho) \cdot (1 - 1/(4z^2))} / (z \cos \delta_0) \approx 460 \text{ м/с}.$$

В этой пружине для солитона с амплитудой $A = 0,001$, что соответствует увеличению угла подъема спирали примерно на $0,5^\circ$, получаем следующие значения:

$$v \approx 460,3 \text{ м/с}; E_M \approx 0,04 \text{ Дж}; P_c \approx 0,092 \text{ кг} \cdot \text{м/с}.$$

«Длина» $2L$ солитона соответствует для этого случая примерно 15,6 витков пружины; растяжение пружины на длине солитона составляет около 26 мм. Более 92 % энергии солитона Рассела и около 75 % смещения ΔS и импульса P_c сосредоточено на участке $[x_M - L, x_M + L]$, где координата x_M отвечает максимуму амплитуды.

Модифицированное КДФ уравнение для пружины и его решение.

Если пружина имеет большой индекс и/или значение параметра овализации ее сечения $\Delta = 1$, то она может быть навита с очень малым углом δ_0 подъема винтовой оси, и для величины l^2 вместо равенства (12) допустимо использовать другое соотношение:

$$l^2 = (tg \delta_0 + cx_3 \cdot q_3)^2 \approx cx_3^2 \cdot q_3^2.$$

В результате уравнение (13) изменяется и приобретает следующий вид:

$$\frac{\partial q_3}{\partial t} = \frac{k}{\sqrt{1+\mu}} \left[\frac{\partial q_3}{\partial x} + cx_3^2 \frac{\partial(q_3^3)}{\partial x} + (1+0.5/(1+\mu)) \frac{\partial^3 q_3}{\partial x^3} \right]. \quad (13 \text{ а})$$

После использования замен

$$u = q_3 \cdot cx_3; \quad \hat{x} = x / (\sqrt{(1+0.5/(1+\mu))}); \quad \hat{t} = t \cdot k / \sqrt{1+\mu} \quad (14 \text{ а})$$

соотношение (13 а) совпадает с модифицированным КДФ уравнением вида (1 а) и имеет устойчивое решение – уединенную волну переноса (2 а). Амплитуда A изменения кручения витка и длина солитона $2L$ для этого случая определяются равенствами

$$A = \sqrt{2(v-1)}, \quad 2L = 4\sqrt{(1+0.5/(1+\mu))/(v-1)} = 4\sqrt{2(1+0.5/(1+\mu))} / A. \quad (15 \text{ а})$$

Заметим, что у данного солитона амплитуда убывает медленнее, чем у классического, поэтому эффективную длину $2L$ пришлось увеличить в 2 раза.

Учтем, что для стальной проволоки по условиям пропорциональности деформаций и напряжений амплитуда $A < 0,005 \cdot z$ [13]. Если индекс пружины $z < 20$, то эта амплитуда остается малой величиной, а в отношении параметров солитона справедливо большинство выводов, сформулированных выше.

Но модифицированный солитон обладает дополнительными «квантовыми» свойствами, которых нет у классического солитона Рассела. Так, площадь под кривой $\Delta\chi_3$ (рис. 5) здесь не зависит от амплитуды волны. Это означает, что у всех модифицированных расхождение ΔS крайних витков одина-

ково и не зависит от его амплитуды и скорости:

$$\Delta S = R \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(x) dx = R \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sqrt{2(v-1)}}{ch(\sqrt{v-1} \cdot x)} dx = \sqrt{2} \cdot \pi R,$$

где R – радиус навивки пружины.

Кроме того, оказалось, что энергия E_M этого солитона пропорциональна его амплитуде (таким свойством обладает фотон, смотри [14]):

$$E_M = \int_{-\infty}^{+\infty} cx_3 q_3^2(x) dx = \frac{1}{cx_3} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2(v-1)}{ch^2(\sqrt{v-1} \cdot x)} dx = \frac{4\sqrt{v-1}}{cx_3} = \frac{2\sqrt{2}}{cx_3} \cdot A.$$

Если пружинная проволока имеет круглое поперечное сечение, то переход к размерным величинам приводит к следующей формуле для энергии солитона:

$$E_M = [\pi / (4(1 + \mu) z)] G \cdot d^3 \cdot A.$$

Например, для стальной проволоки при значениях $d = 3$ мм; $z = 20$; $A \approx 0,06$ (что соответствует изменению угла δ примерно на $3,5^\circ$) получаем:

$$a_0 \approx 226,5 \text{ м/с}; \quad v_c \approx 226,9 \text{ м/с}; \quad E_M \approx 4 \text{ Дж}.$$

«Длина» $2L$ модифицированного солитона для этого случая равняется 17,7 виткам пружины, то есть 3,4 м винтовой оси. Расширение пружины на длине солитона составляет около 100 мм, что в 1,5 раза больше ее диаметра. Величина ΔS оказалась настолько большой, что ее будет несложно зарегистрировать в эксперименте.

Импульс модифицированного солитона определяется формулой

$$P_c = (\pi^2 / 4) d^3 \cdot \sqrt{\rho \cdot G}$$

и не зависит от амплитуды волны, то есть для данной пружины его величина является квантованной. В этом примере она равняется 1,66 кг · м/с. Квантованным является и момент количества движения J_c этой волны.

Принципы генерирования солитонов в пружине. Приведенные результаты свидетельствуют о том, что для появления солитона в стальной пружине необходимо обеспечить высокую интенсивность ее деформирования. Анализируя динамику работы пружин в механизмах различного назначения (смотри, например, [15]), следует признать, что она далека от тех уровней, при которых будет возможно наблюдать возникновение солитона, и для генерирования этих волн понадобится специальная экспериментальная установка. Так, в рассмотренных примерах максимальные скорости V_{x1} перемещения витков достигали 10...12 м/с, что в 2...3 раза превышает уровень, при-

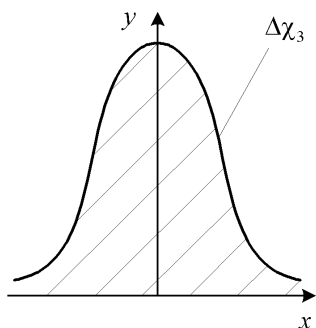


Рисунок 5 – Изменение кручения стержня внутри модифицированного солитона

нятый для пружин циклического действия исходя из предела их выносливости. Эти скорости можно уменьшить за счет снижения амплитуды волны, но при этом длина солитонов дополнительно возрастет и превысит 20 витков, что потребует соответствующего удлинения пружины.

Как это следует из теории, для генерирования солитона в предварительно растянутой пружине достаточно выполнить интенсивное перемещение одного из крайних витков (прицепа), увеличивая длину пружины со скоростью $V_{x_1}(t)$, близкой к зависимости

$$\Delta S'(t) = R \cdot \Psi(v_c t),$$

где $\Psi(x)$ – амплитудная функция солитона, определяемая формулами (2) или (2 а). При этом выполнение условия $V_{x_1}(t) \approx \Delta S'(t)$ важно обеспечить на участке, отвечающем эффективной длине солитона $2L$. Сформированная начальная волна деформации будет перемещаться по пружине со скоростью $v_c \approx a_0$, при этом форма волны будет корректироваться, асимптотически приближаясь к ее устойчивому состоянию $u = \Psi(x - v_c t)$.

Требования к интенсивности динамического возбуждения волны можно существенно снизить, если в экспериментальной установке для генерирования солитонов заменить стальную пружину пружиной из полимерного материала.

В заключение заметим, что уединенная волна переноса может использовать также и часть солитона (например, как указывалось в [9], его задний фронт), объединяя ее с гармоническими или экспоненциальными бегущими волнами в так называемый **волновой пакет**. Принципы формирования в пружине волновых пакетов и вопросы их устойчивости изучаются и будут рассмотрены в дальнейших публикациях этого цикла.

Выводы. Показано, что низкочастотные связанные нелинейные колебания длинной пружины растяжения описываются уравнениями автоколебаний Кортевега – де Фриза.

Получены формулы, связывающие скорость, энергию и другие характеристики уединенной нелинейной волны переноса (классического или модифицированного солитона Рассела) с ее амплитудой.

Характерной особенностью изучаемых солитонов является узкий (для данной пружины) диапазон их скоростей, которые во всех случаях отличаются от скорости распространения соответствующей линейной волны деформации на доли процента.

Список литературы: 1. Лавинский В.И., Григорьев А.А. Связанные колебания винтового цилиндрического стержня // Вестник НТУ «ХПИ». Тематический выпуск «Динамика и прочность машин». – 2008. – № 47. – С. 92-104. 2. Светлицкий В.А., Нарайкин О.С. Упругие элементы машин. – М.: Машиностроение, 1989. – 264 с. 3. Асланян А.Г., Гулин А.В., Картышов С.В. Расчет собственных частот и форм колебаний цилиндрической пружины // Математическое моделирование, т. 2. – 1990. – № 8. – С. 21-30. 4. Товстик П.Е. Асимптотический метод интегрирования

уравнений колебаний пружин // Вестник ЛГУ. Математика, механика, астрономия. – Л.: ЛГУ, 1962. – Вып. 27. – С. 119-134. **5.** Григорьев А.Л., Дериенко А.И. Универсальная математическая модель цилиндрической пружины // Високі технології в машинобудуванні. – Харків: НТУ «ХП», 2004. – Вип. 2 (9). – С. 257-264. **6.** Лавинский В.И., Григорьев А.А. Симметричная матричная линеаризованная модель колебаний винтового стержня. – II Університетська наук.-практ. конф. магістрантів. Тези доповідей. – Харків: НТУ «ХП», 2008. – Т. 1. – С. 64-66. **7.** Захаров В.Е., Манаков С.В., и др. Теория солитонов. – М.: Наука, 1980. **8.** Тахтаджян Л.А., Фаддеев Л.Д. Гамильтонов поход в теории солитонов. – М.: Наука, 1986. **9.** Филиппов А.Т. Многоликий солитон. – М.: Наука, 1990. **10.** Грунауэр А.А., Григорьев А.Л., Вештак И.А. Определение функциональных зависимостей динамических характеристик пружины от закона ее ударного деформирования // Теория механизмов и машин. – Харьков: Вища школа, 1987. – Вып. 42. – С. 40-49. **11.** Дериенко А.И., Король С.А., Григорьев А.А. Идентификация модели винтового бруса колебаний пружины для расчета спектра собственных частот // Вісник КДПУ. – Кременчук, 2008. – Вип. № 1 (48). – С. 46-50. **12.** Грунауэр А.А., Тартаковский И.И., Григорьев А.Л. О связи силы пружины с законом ее деформирования // Теория механизмов и машин. – Харьков: Вища школа, 1985. – Вып. 39. – С. 7-22. **13.** Справочник машиностроителя. В трех томах / Под ред. Е.А. Чудакова. – М.: Гос. науч.- техн. изд-во машин. литературы, 1951. – Т. 3. – 1098 с. **14.** Выхман Э. Квантовая физика. – М.: Наука, 1983. – 415 с. **15.** Хвингия М.В. Вибрация пружин. – М.: Машиностроение, 1969.

Поступила в редколлегию 28.08.2009

УДК 519.7

В.М.ГРИЩЕНКО, канд.техн.наук, доц., НТУ «ХП»

УЗАГАЛЬНЕННЯ ФУНКЦІОНАЛУ ЛАГРАНЖА В ЗАДАЧАХ НЕЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

Розглядається модифікація функціоналу Лагранжа при рішенні задач умовного оптимального проектування конструкцій, яка систематизує існуючі підходи.

The modification of Lagrange functional in problem of optimum designing is consider.

1. Актуальність проблеми. В інженерній, організаторській діяльності, в економіці і багатьох інших сферах виникає безліч задач оптимізаційного характеру. Як правило, кожна з них має декілька можливих варіантів рішення. Зрозумілим є прагнення знайти «найкращий».

З точки зору математики ця проблема пов'язана з пошуком параметрів, які забезпечують досягнення системою екстремуму функціоналу цілі (extr). Широкий клас задач параметричної оптимізації зводиться до рішення задач нелінійного програмування (НП). Оптимізація (Opti) як один з нових напрям-